

Цикады и простые числа

Цикады – крылатые насекомые, появившиеся ок. 1,8 млн лет назад в эпоху плейстоцена, когда ледники попеременно занимали и оставляли территорию Северной Америки. Цикады из рода *Magicicada* (так называемые периодические цикады) проводят большую часть своей жизни под землей, питаются соками корней растений, после чего выбираются на поверхность, где спариваются и быстро умирают. Этим существам свойственна одна удивительная особенность: время их появления из земли соответствует периодам, длительность которых обычно составляет 13 или 17 лет, т. е. является простым числом (простое число – такое целое число, у которого есть только два целых делителя: 1 и оно само, например 11, 13, 17). Весной 13-го или 17-го года своей жизни периодические цикады начинают строить туннель для выхода наружу. Иногда более полутора миллионов особей появляются одновременно на одном акре земли. Подобная массовость является одним из механизмов их выживания, поскольку служит быстрому пресыщению хищников, например птиц. Те просто не успевают съесть всех выбравшихся на поверхность цикад.

Исследователи предполагают, что формирование циклов длиной в простое число лет обусловлено тем, что таким образом повышается вероятность избежать встречи с более короткоживущими хищниками и паразитами. Например, если бы жизненный цикл таких цикад составлял 12 лет, они стали бы более легкой добычей для всей совокупности хищников с продолжительностью жизненных циклов 2, 3, 4 или 6 лет. Марио Маркус из Института молекулярной физиологии Общества Макса Планка (Дортмунд, Германия) вместе со своими коллегами обнаружил, что подобные «простые» циклы складываются естественным образом при математическом моделировании эволюционных изменений в результате взаимодействия «хищник–жертва». В ходе эксперимента моделируемым при помощи компьютера популяциям цикад были изначально приписаны случайные значения длительности жизненных циклов. Спустя определенное время последовательность мутаций неизменно приводила к выработке у моделируемых цикад стабильного цикла из простого числа лет.

Конечно, подобные исследования все еще находятся в зачаточном состоянии и оставляют множество вопросов без ответа. Что такого особенного в 13 и 17 годах? Какие именно хищники и паразиты обусловили именно такой сдвиг длительности жизненного цикла цикад? И по-прежнему остается загадкой, почему из всех известных науке 1500 видов этих насекомых лишь представители небольшого рода *Magicicada* являются периодическими.

СМ. ТАКЖЕ Шагомер у муравьев (150 млн до н. э.), Кость Ишанго (18000 до н. э.), Решето Эратосфена (240 до н. э.), Проблема Гольдбаха (1742), Построение правильного семнадцатигульника (1796), «Арифметические исследования» Гаусса (1801), Доказательство теоремы о распределении простых чисел (1896), Константа Бруна (1919), Гипотеза Гильбранта (1958), Числа Серпинского (1960), Скатерть Улама (1963), Эрдёш и его опыт математического сотрудничества (1971), Гипотеза Андрики (1985).

Время перехода некоторых цикад к стадии взрослого насекомого соответствует периодам, равным простому числу лет, как правило, 13 и 17 годам. Иногда более полутора миллионов особей появляются на поверхности одного акра земли за небольшой промежуток времени.



Узлы

История вязания узлов уходит во времена, предшествующие возникновению современного человека (*Homo sapiens*). К примеру, в одной из пещер в Марокко были обнаружены раскрашенные охрой раковины с проделанными в них отверстиями возрастом 82 000 лет. Другие археологические находки свидетельствуют о том, что бусы из раковин изготавливались древними людьми и значительно ранее. Отверстия в раковинах означают, что сквозь них продевалась веревка или нить, а значит, чтобы закрепить ракушки-бусины и придать нанизанной нити удобную для ношения форму, должны были использоваться и узлы.

Квинтэссенцией использования орнаментальных узлов в декоративном искусстве является знаменитая Келлская книга – богато украшенное Евангелие, созданное ирландскими монахами примерно в 800 г. В наши дни изучение свойств узлов, например трехлистного узла с тремя пересечениями, составляет отдельный раздел в широкой области математики, посвященной топологии замкнутых перекрученных петель. В 1914 г. немецкий математик Макс Ден (1878–1952) доказал, что зеркальные отражения трехлистного узла не являются топологически эквивалентными.

Математики столетиями пытались вывести последовательности действий, которые помогали бы отличать сплетения, *выглядящие* как узлы (так называемые *тривиальные* или *незаузелненные* узлы), от истинных узлов и различать истинные узлы между собой. С течением лет были составлены бесконечные на первый взгляд таблицы отличных друг от друга узлов. На сегодняшний день найдено более 1,7 млн неэквивалентных узлов, на графической диаграмме которых имеется 16 и менее пересечений.

Сейчас по тематике узлов проводятся специальные конференции. Узлы интересуют ученых из самых различных областей, от молекулярной генетики (где они помогают понять, как распутать петлеобразные структуры в ДНК) до физики частиц (где они используются, чтобы отобразить фундаментальную природу элементарных частиц).

Узлы имели ключевое значение для развития цивилизации. Они использовались для соединения частей одежды, крепления на теле оружия и доспехов, создания жилищ, сделали возможным мореплавание и исследование мира. Сейчас теория узлов в математике достигла такого уровня сложности, что осознать глубинные возможности ее применения довольно непросто. За несколько тысячелетий человечество преобразовало простые узелки на бусах в модели структуры реального мира.

СМ. ТАКЖЕ Кипу (3000 до н. э.), Кольца Борромео (834), Узлы Перко (1974), Полиномы Джонса (1984), Закон Мерфи и узлы (1988).

Квинтэссенцией использования орнаментальных узлов в искусстве является Келлская книга – богато украшенное Евангелие, созданное ирландскими монахами примерно в 800 г. н. э. На приведенной иллюстрации хорошо видно, как узлы образуют самые разные и причудливые узоры.



Кость Ишанго

В 1960 г. бельгийский геолог и путешественник Жан де Хайнцелин де Брокур (1920–1998) обнаружил на территории современной Демократической Республики Конго кость павиана с нанесенными на нее отметками. Сначала предполагалось, что кость Ишанго является обычной счетной рейкой, использовавшейся африканцами каменного века. Однако, по мнению некоторых ученых, последовательность насечек свидетельствует о том, что математические способности ее владельца могли превосходить простые навыки счета объектов.

Кость была обнаружена в области Ишанго около верховий реки Нил, на территории которой располагалась стоянка большой группы людей палеолита. Позже эта местность оказалась погребена под пеплом при извержении вулкана. Один из рядов отметок на кости начинается с трех бороздок, число которых затем удваивается до шести. Четыре бороздки сменяются восемью. За десятью бороздками следуют пять. Это может свидетельствовать об общем понимании операций удвоения и деления пополам. Еще более удивительным кажется тот факт, что все числа во втором ряду являются нечетными (9, 11, 13, 17, 19, 21). В третьем ряду содержатся все простые числа между 10 и 20, а сумма всех чисел в каждом из трех рядов равняется либо 60, либо 48, а оба этих числа кратны 12.

Учеными найдено некоторое число палеолитических счетных реек, среди которых имеются и еще более древние, чем кость Ишанго. Например, в местности Лебомбо в Свазиленде была обнаружена малоберцовая кость павиана возрастом 37 000 лет с 29 насечками. Большеберцовая кость волка возрастом 32 000 лет с 57 насечками, разделенными на группы по пять, была найдена в Чехословакии. Хотя подобные построения и являются чисто умозрительными, некоторые исследователи даже выдвинули гипотезу о том, что отметки на кости Ишанго представляют собой некий вид лунного календаря, при помощи которого женщина каменного века отслеживала свой менструальный цикл. Это позволило им выдвинуть тезис: «Менструация породила математику». Даже если кость Ишанго представляет собой простое средство счета, сам факт наносимых для этой цели отметок отличает нас от животных и представляет собой первый шаг к символическим вычислениям. Полностью разгадать загадку кости Ишанго мы сможем только тогда, когда подобных ей объектов будет найдено больше.

СМ. ТАКЖЕ Счет у приматов (30 млн до н. э.), Цикады и простые числа (1 млн до н. э.), Решето Эратосфена (240 до н. э.).

Кость павиана с нанесенными на нее рядами отметок из местности Ишанго сначала считалась обычной счетной рейкой, некогда использовавшейся африканцами каменного века. Однако, по мнению некоторых ученых, характер отметок предполагает, что математические способности ее владельца превосходили простые навыки счета объектов.



Кипу

Древние инки использовали для записи чисел *кипу* – сложные мнемонические конструкции, состоящие из нитей и завязываемых на них узелков. До недавнего времени древнейшее из дошедших до наших дней кипу датировалось 650 г., однако в 2005 г. при раскопках поселения Караль на побережье Перу было обнаружено кипу, возраст которого составляет приблизительно 5000 лет.

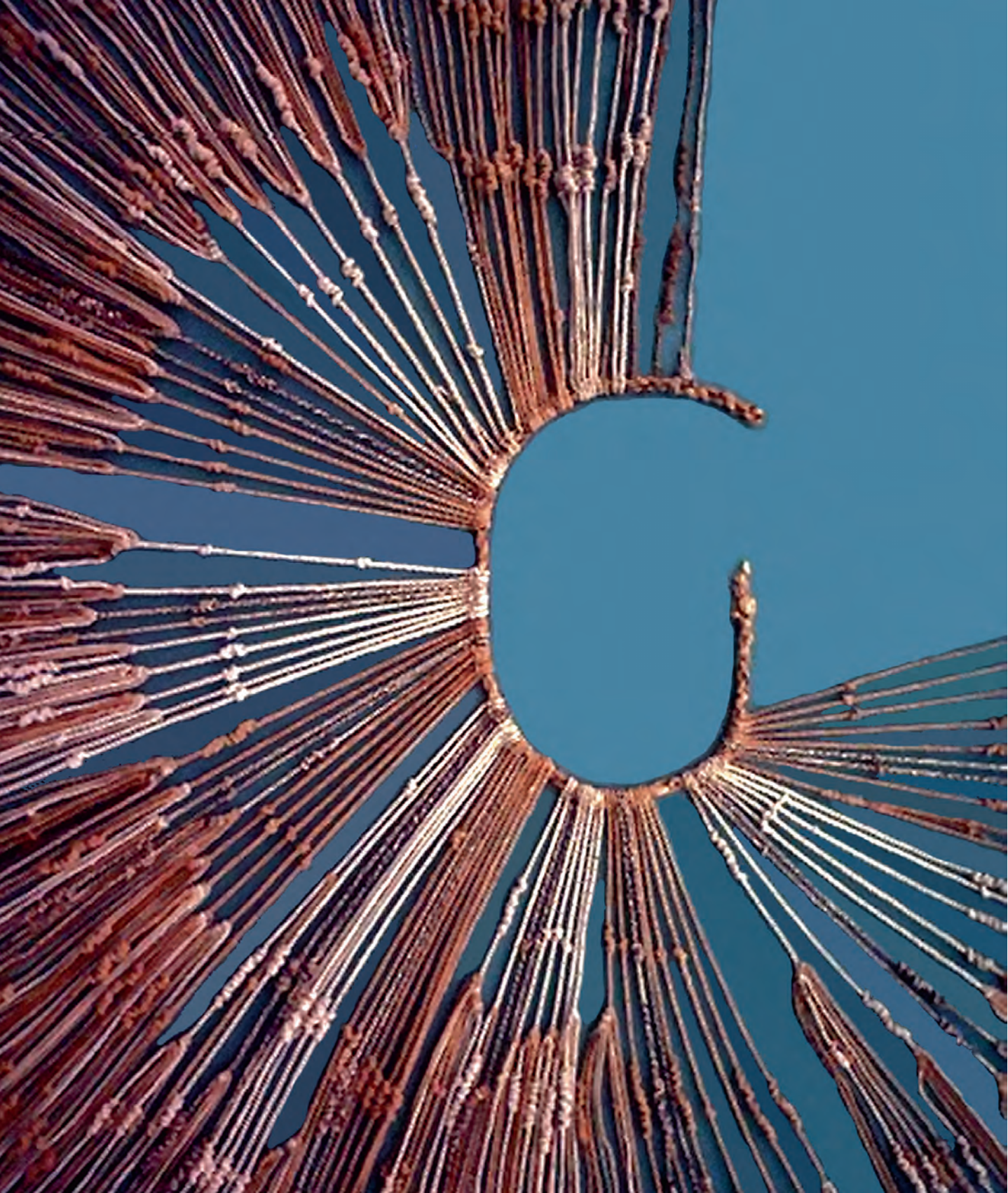
Южноамериканские инки создали высокоразвитую цивилизацию, которую отличали общая государственная религия и общий язык. Несмотря на то что у инков не существовало письменности в привычном понимании этого слова, они вели подробные записи, зашифрованные при помощи особой логико-числовой системы в кипу, сложность которых могла составлять от трех до нескольких тысяч нитей. К несчастью, испанцы, при освоении ими Южной Америки, сочли странные для них кипу творениями дьявола. Тысячи кипу были уничтожены во славу Господа, и на данный момент их сохранилось всего около 600.

Тип узлов, их взаимное расположение, направление нитей, их уровень, цвет и расстояния между ними – все это имело определенный количественный смысл и соответствовало объектам реального мира. Различные группы узлов использовались для записи различных степеней числа 10. При помощи узлов велся учет человеческих и материальных ресурсов, делались разнообразные календарные записи. Кипу могли содержать и более детальные данные, например строительные чертежи и схемы танцев, или даже отображать события из истории инков. Кипу развеивают представление о том, что математическое мышление может развиваться лишь после того, как цивилизацией будет изобретено письмо. Пример инков показывает, что общество может достичь высокого уровня математического развития и при полном отсутствии привычной нам письменности. Любопытно отметить, что в настоящее время существуют компьютерные системы хранения и управления данными, которые называются «кипу» («Quipu») в честь этого удивительного древнего устройства.

Одним из зловещих назначений кипу являлся расчет жертвоприношений. В инкском обществе проводились ежегодные ритуальные убийства определенного числа взрослых и детей, и кипу использовались в том числе и для планирования подобных мероприятий. Некоторые из таких кипу олицетворяют собой империю инков, нити в них обозначают дороги, а узлы – число жертв, приносимых в дар богам.

СМ. ТАКЖЕ Узлы (100 000 до н. э.), Счёты (1200).

Древние инки использовали для записи чисел особые конструкции – кипу, состоящие из завязанных узелками нитей. Тип узлов, их взаимное расположение, направление нитей, их уровень и цвет использовались для записи дат, числа людей и различных иных объектов.



Игральные кости

Трудно представить себе мир без случайных чисел. В 1940-е годы задача генерации статистически случайных чисел встала перед физиками при моделировании термоядерного взрыва. В наши дни случайные числа используются во многих компьютерных сетях для регулировки интернет-трафика и предотвращения перегрузок. При помощи случайных чисел формируется беспристрастная выборка мнений потенциальных избирателей при политических опросах.

Игральные кости, первоначально изготавливаемые из мелких косточек копытных животных, были одним из первых способов получения случайных чисел. В древних культурах считалось, что боги влияют на исход бросания, поэтому на результат метания костей полагались при принятии важнейших решений – от выбора правителей до разделения наследства. Даже сейчас метафора Бога, бросающего кости, весьма популярна – достаточно вспомнить известное высказывание астрофизика Стивена Хокинга: «Бог не только играет в кости, но и иногда путает нас, бросая их там, где они не могут быть видны».

Древнейшие образцы игровых костей были обнаружены вместе с набором для игры в нарды возрастом 5000 лет при раскопках легендарного Сожженного города (Шахри-Сухте) на юго-востоке Ирана. Это поселение прошло четыре стадии развития цивилизации и неоднократно уничтожалось пожарами до того, как было полностью покинуто в 2100 г. до н. э. Там же археологами был найден древнейший протез глазного яблока, который в далекие времена гипнотически взирал с лица древней жрицы или прорицательницы.

Игральные кости столетиями используются в качестве наглядного примера при изучении теории вероятностей. В случае однократного подбрасывания кости с количеством граней n и различными числами на каждой из граней вероятность выпадения любого из таких чисел равна $1/n$. Вероятность выпадения определенной последовательности из i чисел равна $1/n^i$. Например, шанс выбросить четверку вслед за единицей на традиционной игральной кости составляет $1/6^2 = 1/36$. При подбрасывании двух традиционных костей шанс получить некоторую сумму чисел равен отношению количества комбинаций, дающих в сумме искомое число, к общему числу всех возможных комбинаций – вот почему выбросить на двух костях в сумме 7 гораздо легче, чем 2.

СМ. ТАКЖЕ: Закон больших чисел (1713), Игла Бюффона (1777), Метод наименьших квадратов (1795), «Аналитическая теория вероятностей» Лапласа (1812), Критерий хи-квадрат (1900), Затерявшиеся в гиперпространстве (1921), Создание рандомизирующих устройств (1938), Стратегия игры в «Свинью» (1945), Метод середины квадрата фон Неймана (1946).

Сначала игральные кости изготавливались из мелких косточек копытных животных и были одними из самых ранних средств получения случайных чисел. В древних культурах кости использовались для предсказания будущего, поскольку считалось, что боги влияют на исход бросания.



Магические квадраты

Бернар Френикль де Бесси (1602–1675)

По легенде, магические квадраты были изобретены в Древнем Китае, а первый манускрипт с их упоминанием относится ко временам императора Юя Великого и датируется примерно 2200 г. до н. э. *Магический квадрат* состоит из N^2 клеток, или *ячеек*, заполненных неповторяющимися целыми числами таким образом, что сумма чисел во всех горизонталях, вертикалях и главных диагоналях такого квадрата одинакова.

Если совокупность целых чисел в магическом квадрате представляет собой последовательный ряд от 1 до N^2 , то говорят, что это квадрат N -го порядка, а магическое число, или сумма каждой строки, является константой, равной $N(N^2 + 1)/2$. Альбрехт Дюрер, художник эпохи Возрождения, в 1514 г. составил приведенный здесь замечательный магический квадрат размерами 4×4 .

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Обратите внимание, что два центральных числа в нижнем ряду вместе составляют «1514», т. е. год создания квадрата. Сумма чисел во всех строках, столбцах и главных диагоналях равняется 34. Кроме того, 34 в сумме также дают числа, расположенные по внешним углам квадрата ($16 + 13 + 4 + 1$), и числа в малом центральном квадрате 2×2 ($10 + 11 + 6 + 7$).

В 1693 г. все 880 возможных магических квадратов четвертого порядка были перечислены в опубликованном посмертно сочинении «О магических квадратах или таблицах» Бернара Френикля де Бесси, выдающегося французского математика-любителя, который сохраняет титул одного из главных исследователей магических квадратов и по сей день.

Человечество прошло долгий путь со времен создания простейших магических квадратов 3×3 , издревле почитаемых во всех культурах и на всех континентах — от индейцев майя до африканского народа хасуа. Сейчас математики изучают свойства магических квадратов в пространствах высокой размерности, например в форме четырехмерных гиперкубов и имеющих магические суммы во всех соответствующих направлениях.

СМ. ТАКЖЕ Магические квадраты Франклина (1769), Совершенный магический тессеракт (1999).

В убранстве собора Святого семейства в испанском городе Барселоне используется магический квадрат размером 4×4 , магическое число которого равно 33, т. е., согласно многочисленным интерпретациям библейских текстов, возрасту Иисуса Христа на момент смерти. Отметим, что этот магический квадрат нельзя назвать традиционным, так как некоторые числа в нем повторяются.



A 4x4 grid of numbers on a wooden block, surrounded by large, textured letters and a circular object on a greenish-grey surface. The numbers are arranged as follows:

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Плимптон 322

Джордж Артур Плимптон (1855–1936)

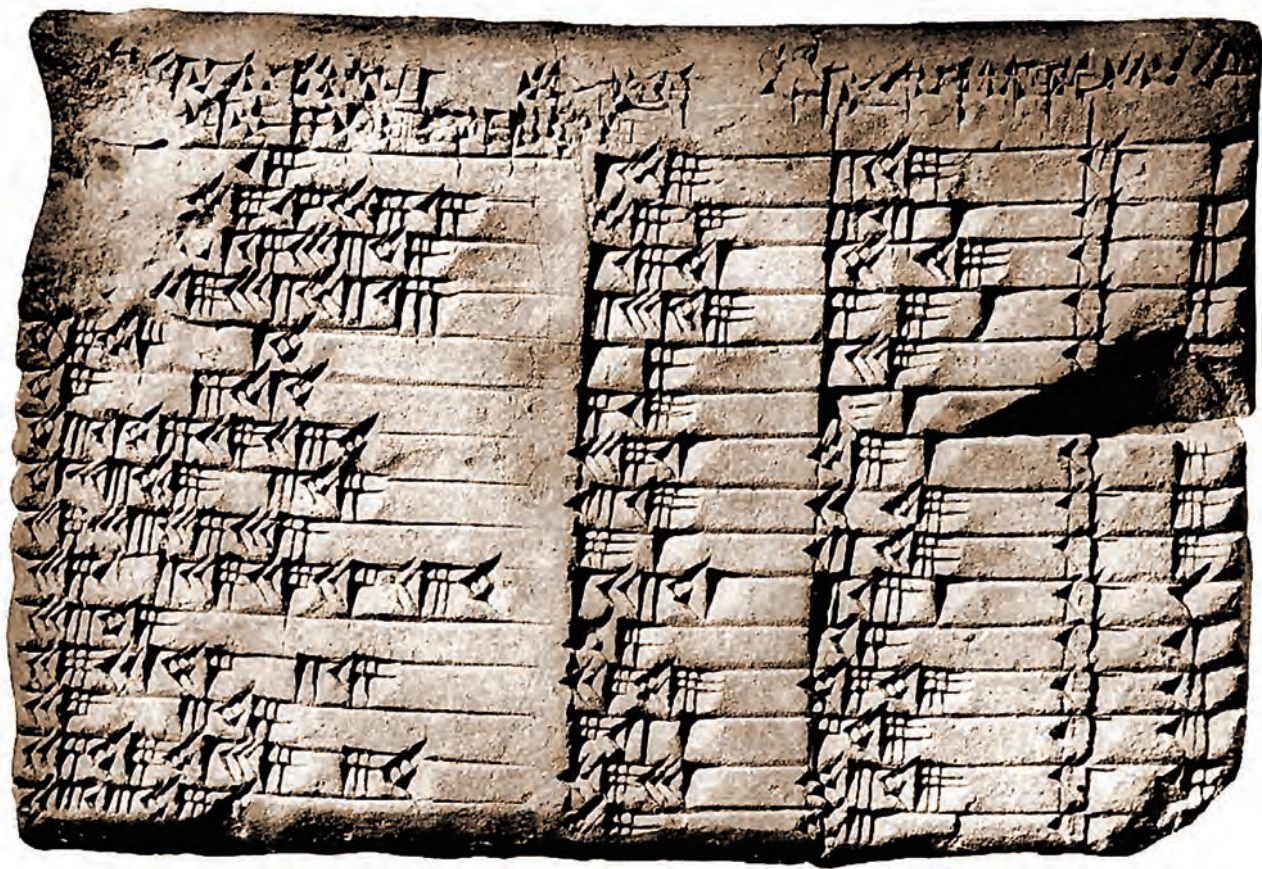
«Плимптон 322» – название загадочной вавилонской глиняной таблички. В ней содержатся записанные клинописью числа, упорядоченные в таблицу из 4 столбцов и 15 строк. Историк науки Элеанор Робсон описывает ее как «один из самых знаменитых математических артефактов в мире». Табличка датируется ок. 1800 г. до н. э. и представляет собой перечень пифагоровых троек – таких целых чисел, которые соответствуют длинам сторон прямоугольного треугольника и удовлетворяют соотношению $a^2 + b^2 = c^2$, соответствующему теореме Пифагора. К примеру, пифагорову тройку образуют числа 3, 4, 5. Четвертая колонка таблицы попросту содержит номер строки. Единого мнения относительно назначения чисел в таблице не существует, но некоторые исследователи полагают, что они были набором решений, записанных учащимися при изучении алгебраических или тригонометрических задач.

Табличка «Плимптон 322» названа по имени нью-йоркского издателя Джорджа Плимптона, который в 1922 г. приобрел ее у торговца древностями за 10 долл., а затем передал в дар Колумбийскому университету. Она является памятником древневавилонской цивилизации, сложившейся в Месопотамии – плодородной долине между реками Тигр и Евфрат (территория современного Ирака). Если соотносить время создания таблички с известными историческими фактами, то можно сказать, что безымянный писец, ее автор, жил в пределах столетия относительно эпохи правления царя Хаммурапи, известного своим сводом законов и принципом «око за око, зуб за зуб». Судя по событиям библейской истории, Авраам, о котором говорится, что он увел своих людей к западу от расположенного на берегу Евфрата города Ура в Ханаан, также должен быть близким современником писца.

Вавилоняне писали на влажной глине, выдавливая на ней знаки стилем – особой заостренной палочкой для письма. В вавилонской системе счисления число 1 записывалось в виде единичного штриха, а числа от 2 до 9 представляли собой различные сочетания таких штрихов.

СМ. ТАКЖЕ Теорема и треугольники Пифагора (600 до н. э.).

«Плимптон 322» – вавилонская клинописная глиняная табличка (показана вертикально). В ней перечисляются целые числа, соответствующие длинам сторон прямоугольного треугольника и удовлетворяющие соотношению теоремы Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$.



Папирус Ринда

Ахмес (ок. 1680 до н. э. – ок. 1620 до н. э.),
Александр Генри Ринд (1833–1863)

Папирус Ринда считается наиболее значимым из всех сохранившихся источников по древнеегипетской математике. Этот свиток шириной примерно 30 см и длиной около 5,5 м был обнаружен в одном из захоронений в городе Фивы, расположенном на восточном берегу реки Нил. Создавший его писец по имени Ахмес пользовался иератическим письмом, родственным иероглифической системе. Так как время написания свитка датируется примерно 1650 г. до н. э., Ахмес оказывается первым человеком в истории математики, чье имя дошло до наших дней! Кроме того, в этом папирусе содержатся самые ранние примеры использования символов, обозначающих математические операции. К примеру, «плюс» обозначается парой ног, идущих навстречу прибавляемой величине.

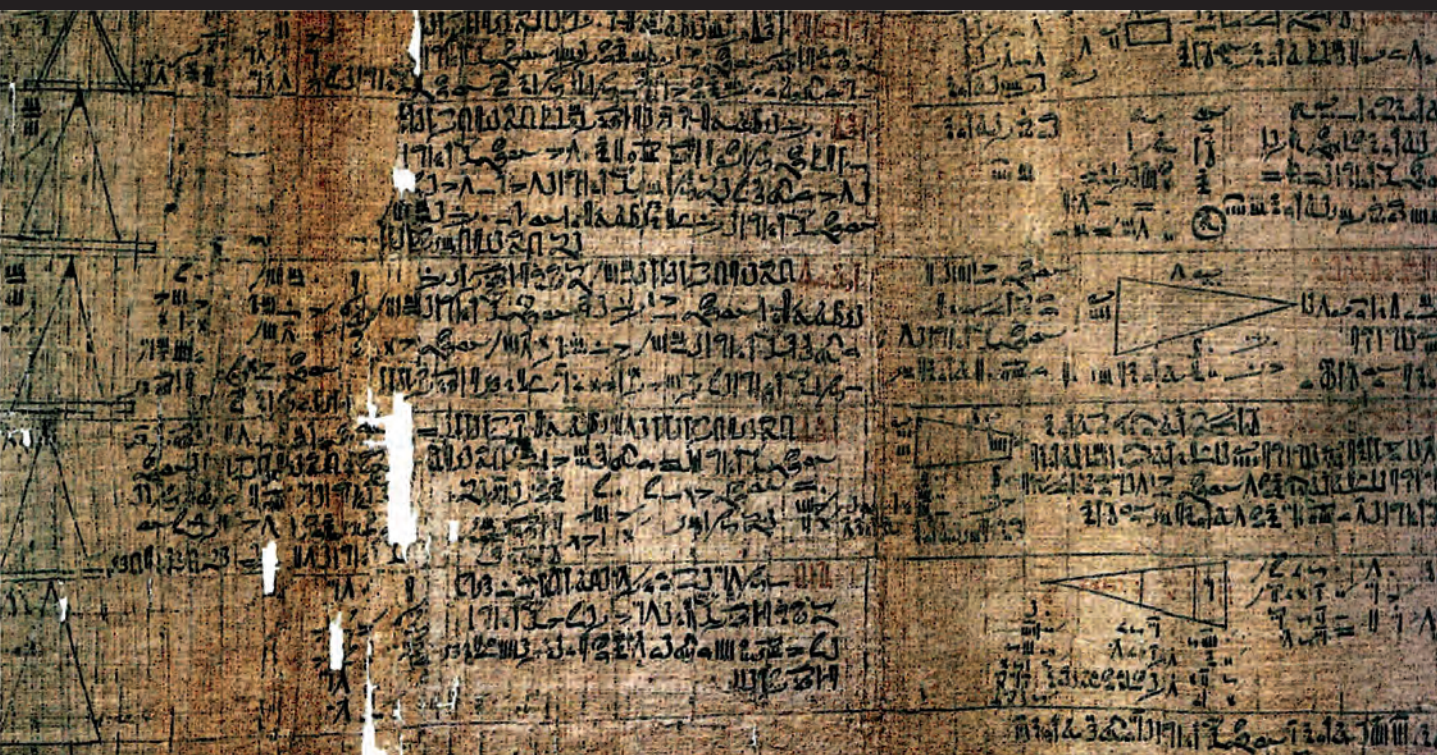
В 1858 г. шотландский юрист и будущий египтолог Александр Генри Ринд приехал в Египет, чтобы поправить пошатнувшееся здоровье. Он купил этот папирус на обычном рынке в Луксоре. В 1864 г. свиток был приобретен Британским музеем.

Ахмес пишет, что свиток учит «точному исчислению вещей, ведущему к пониманию их сущности, постижению всех их тайн и загадок». В свитке рассматриваются как различные теоретические вопросы, например действия с дробями, арифметические прогрессии, алгебраические операции и геометрия пирамид, так и практические математические знания, требующиеся для повседневных бытовых расчетов и используемые при строительстве и финансовом учете. Наиболее интересной мне кажется задача под номером 79, интерпретация которой изначально вызывала у ученых некоторые затруднения.

Сейчас «задачу 79» обычно рассматривают как загадку, которую можно перевести так: «В семи домах содержат по семь кошек. Каждая кошка убила по семь мышек. Каждая мышка съела по семь колосьев зерна. Каждый колосок зерна дал бы семь гекатов (мер) пшеницы. Сколько здесь всего перечислено?». Любопытно отметить, что вариант этой загадки с упоминанием числа 7 и животных продолжал существовать на протяжении тысячелетий! Мы видим очень похожую задачу в «Книге абака» (т. е. «Книге о счете») Фибоначчи 1202 г., и в гораздо более позднем английском детском стихе «Когда я шел в Сент-Айвс», также повторяющем число 7.

СМ. ТАКЖЕ Ганита сара самграха (850), «Книга абака» Фибоначчи (1202), «Тревицкая арифметика» (1478).

Папирус Ринда – наиболее важный из имеющихся источников по древнеегипетской математике. Свиток, фрагмент которого здесь представлен, посвящен различным математическим задачам, в том числе действиям с дробями, арифметическим прогрессиям, алгебраическим операциям, геометрии, а также финансовому учету.



Крестики-нолики

Игра в крестики-нолики – одна из древнейших и наиболее популярных игр, известных человечеству. Хотя появление игры в ее современном варианте может относиться и к не столь отдаленным временам, археологи установили, что возникновение игр по принципу «выстрой три фигуры в ряд» восходит к Древнему Египту ок. 1300 г. до н. э., и я подозреваю, что игры подобного типа возникли на заре человеческого общества. При игре в крестики-нолики два игрока, один из которых играет крестиками, «Х», а другой ноликами, «О», по очереди ставят свои фигуры на клетки игрового поля размерами 3×3 . Игрок, первым выстроивший 3 своих фигуры в один ряд по вертикали, горизонтали или диагонали, выигрывает. На доске размерами 3×3 игру всегда можно свести к ничьей.

В Древнем Египте времен великих фараонов настольные игры составляли важную часть повседневной жизни. Известно, что в игры, подобные крестикам-ноликам, играли и в те давние дни. Крестики-нолики можно считать своеобразным «атомом», из которого с течением столетий строились молекулы все более сложных позиционных игр. С небольшими изменениями и дополнениями эта простая игра приобретает невероятную сложность и начинает требовать большого времени на то, чтобы ей в должной степени обучиться.

Математики и любители головоломок постоянно переносят принципы игры в крестики-нолики на доски большего размера, пространства большей размерности и странные игровые поверхности, например такие, как прямоугольные или квадратные доски, соединенные по краям и образующие тор (форму пончика) или бутылку Клейна (поверхность со всего одной стороной).

Приведем несколько любопытных фактов об этой игре. Количество способов, которыми игроки могут разместить свои крестики и нолики на доске, составляет $9! = 362\,880$. Число возможных партий при учете всех игр, которые заканчиваются за 5, 6, 7, 8 и 9 ходов, составляет 255 168. В начале 1980-х годов компьютерные гении Дэнни Хиллис и Брайан Сильвермен с друзьями собрали способный играть в крестики-нолики компьютер из 10 000 деталей конструктора «Tinkertoy®». В 1998 г. силами ученых и студентов из Торонтского университета был создан робот, способный играть против человека в трехмерные крестики-нолики ($4 \times 4 \times 4$).

СМ. ТАКЖЕ Го (548 до н. э.), Игра «Икосиан» (1857), Решение игры «Овари» (2002), Решение игры в шашки (2007).

Аналитическое представление всех возможных партий в крестики-нолики, данное философами Патриком Гримом и Полем Сент-Дени. Каждая клетка на доске делится на более мелкие ячейки, чтобы показать различные возможные варианты выбора.



Пифагор и его математическое братство

Пифагор Самосский (ок. 580 до н. э. – ок. 500 до н. э.)

Около 530 г. до н. э. древнегреческий математик Пифагор поселился в городе Кротоне в Италии, чтобы развивать там учение о математике, музыке и перерождении душ. Хотя, вероятно, многие из достижений Пифагора в действительности принадлежат его ученикам, идеи Пифагора (или идеи пифагорейского братства) влияли на развитие нумерологии и математики на протяжении многих столетий. Пифагору обычно приписывается открытие математических соотношений, соответствующих музыкальным гармониям. К примеру, он заметил, что колеблющиеся струны производят гармоничные звуки, если соотношения их длин выражены целыми числами. Его также интересовали треугольные числа (равные числу кружков, которые при составлении вместе образуют рисунки в виде равносторонних треугольников) и совершенные числа (равные сумме всех своих собственных положительных делителей). Хотя знаменитая теорема, носящая его имя ($a^2 + b^2 = c^2$ для прямоугольного треугольника с катетами a и b и гипотенузой c), была известна индийцам и вавилонянам задолго до него, некоторые исследователи считают, что Пифагор и его ученики были первыми среди греков, кто сумел ее доказать.

Для Пифагора и его последователей числа были подобны богам, чистым и свободным от изменчивости материального мира. Почитание чисел от 1 до 10 было для пифагорейцев некоторой разновидностью политеизма. Они верили, что числа являются живыми существами, обладающими телепатической формой сознания. Согласно их учению, человек может отринуть свою «трехмерную» жизнь и достигнуть телепатического единения с этими численными сущностями при помощи различных техник медитации.

Некоторые из этих на первый взгляд довольно странных идей не чужды и современным математикам, которые часто спорят о том, является ли математика плодом исключительно человеческого разума или же самостоятельной частью Вселенной, никак не зависящей от человека. Для пифагорейцев математика была экстатическим откровением. Осуществленное пифагорейцами смешение математических и теологических представлений впоследствии оказало значимое влияние на древнегреческую религиозную философию, играло важную роль в религиозной мысли Средневековья и даже нашло свое отражение в работах философа Иммануила Канта в Новое время. Бертран Рассел полагал, что если бы не Пифагор, теологи вряд ли столь упорно стремились бы найти логические доказательства бытия Бога и бессмертия души.

СМ. ТАКЖЕ Плимpton 322 (1800 до н. э.), Теорема и треугольники Пифагора (600 до н. э.).

Пифагор (бородатый мужчина с книгой внизу слева) учит юношу музыке на картине «Афинская школа» Рафаэля Санти (1483–1520), великого художника и архитектора итальянского Возрождения.



Аристотелево колесо

Аристотель (384 до н. э. – 322 до н. э.)

Упоминание о парадоксе Аристотелева колеса мы находим в древнегреческом трактате «Механика». Эта проблема веками вызывала большой интерес у величайших математиков. Представим себе маленькое колесо, прикрепленное к большому таким образом, что их можно схематически изобразить в виде двух концентрических окружностей. Между точками на большей окружности и точками на меньшей окружности существует взаимно однозначное соответствие, т. е. каждой точке на большей окружности соответствует одна и только одна точка на меньшей окружности, и наоборот. Тогда оказывается, что наша фигура из двух колес проедет одинаковое расстояние независимо от того, совершит ли малое колесо оборот по стержню, проложенному над дорогой на высоте его нижней точки, или же большое колесо сделает оборот по дороге. Но как такое возможно? В конце концов, мы же прекрасно знаем, что длины окружностей колес не одинаковы.

Сейчас математикам известно, что взаимно однозначное соответствие точек на двух кривых не означает, что они должны иметь одинаковую длину. Георг Кантор (1845–1918) доказал, что число или мощность множества точек на отрезках любой длины одинакова. Он назвал такое **трансфинитное число** точек «континуумом». Например, всем числам на отрезке от нуля до единицы могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие все числа на некоторой бесконечной линии. Разумеется, до выхода работы Кантора эта проблема вызывала у математиков большие затруднения. Также отметим, что, с физической точки зрения, при движении большого колеса по поверхности дороги маленькое колесо будет проскальзывать и волочиться по линии, касающейся его поверхности.

Точная дата написания «Механики» и имя ее автора могут навсегда остаться загадкой. Хотя эту работу часто приписывают Аристотелю, многие ученые сомневаются, что «Механика», старейший известный трактат по инженерному делу, в действительности была написана им. Другим возможным кандидатом в авторы этого сочинения является ученик Аристотеля Стратон из Лампсака по прозвищу «Физик», умерший в 270 г. до н. э.

СМ. ТАКЖЕ Апории Зенона (445 до н. э.), Санкт-Петербургский парадокс (1738), Трансфинитные числа Кантора (1874), Парадокс брадобрея (1901), Парадокс Банаха—Тарского (1924), Парадокс «Гранд-отеля» Гильберта (1925), Парадокс дней рождения (1939), Парадокс береговой линии (ок. 1950), Парадокс Ньюкома (1960), Неразрешимость континуум-гипотезы (1963), Парадокс Паррондо (1999).

Представим себе маленькое колесо, прикрепленное к большому. На иллюстрации показано движение фигуры из двух колес, которая движется слева направо, так что большее колесо катится по поверхности дороги, а малое – по стержню, протянутому вдоль его нижней точки.

